CORRIGÉ TD EUCLIDIENS

(2)

1) E un espace euclidien, $\dim E = n$. $v \in \mathcal{L}(E)$.

a. Soient $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_n)$ deux BON de E. = base orthonormée

$$\sum_{i=1}^{n} <v(e_i) | e_i > e_i = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Mat}_e(v)\right)$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Mat}_f(v)\right)$$ car la trace est un invariant de similitude

$$= \sum_{i=1}^{n} <v(f_i) | f_i > f_i$$

b. $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} <v(e_i) | f_j>^2 = \sum_{i=1}^{n} \|v(e_i)\|^2 = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Mat}_e(v^* v)\right)$$

car $\|v(x)\|^2 = <v(x), v(x)> = <v^* \circ v(x) | x>$.

c. v projecteur orthogonal de rang r.

Alors on dispose de $(e_1, \dots, e_n)$ BON, $\mathrm{Mat}_e(v) = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{matrix}}_{r} & (0) \\ & \underbrace{\begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix}}_{n-r} \end{pmatrix}$

d'où $S = \sum_{i=1}^{n} \|v(e_i)\|^2 = r$.

2) a) Si $A \in O_n(\mathbb{R})$,

$$\sigma(A) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [A^T]_{ji} [A]_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [A^T A]_{ii} = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

Si A est la matrice d'un projecteur orthogonal dans la base canonique

$\sigma(A) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij}^2 = r$ par ce qui précède.

b. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$. a et ω les endomorphismes canoniquement associés.

$$\sigma(\Omega^T A \Omega) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overbrace{< \omega^* \circ a \circ \omega (e_i) \mid \omega^* \circ a \circ \omega (e_j) >}^{= a_{ij}^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} < a(f_i) \mid a(f_j) >$$ où f obtenue de e par $f = \Omega^T e \Omega$, orthogonale.

$$= \sum_{1 \leq i,j \leq n} [A]_{ij}^2 = \sigma(A).$$

7

(a) On remarque que $VV^\top$ correspond à une matrice carrée de taille n.
La matrice $V^\top V$ est symétrique car

$$\left(V^\top V\right)^\top = V^\top \left(V^\top\right)^\top = V^\top V.$$

Par combinaison linéaire, la matrice Q est symétrique.

Par développement du carré de la somme de deux matrices qui commutent

$$Q^\top Q = Q^2 = \mathrm{I}_n - \frac{4}{\|V\|^2} VV^\top + \frac{4}{\|V\|^4}\left(VV^\top\right)^2.$$

Or

$$\left(VV^\top\right)^2 = V\underbrace{V^\top V}V^\top = \|V\|^2 VV^\top$$

donc

$$Q^\top Q = Q^2 = \mathrm{I}_n - \frac{4}{\|V\|^2} VV^\top + \frac{4}{\|V\|^2} VV^\top = \mathrm{I}_n.$$

Ainsi, la matrice Q est orthogonale.

(b) Puisque $Q^2 = \mathrm{I}_n$, la matrice Q figure une symétrie.
Aussi, pour $X \in \mathrm{Vect}(V)$, en écrivant $X = \lambda V$

$$QX = \lambda V - 2\frac{1}{\|V\|^2} VV^\top(\lambda V) = \lambda V - 2\lambda V = -\lambda V = -X$$

et, pour $X \in \mathrm{Vect}(V)^\perp$,

$$QX = X - 2\frac{1}{\|V\|^2} V\underbrace{V^\top X}_{=0} = X.$$

On en déduit que Q est la symétrie orthogonale par rapport à l'espace $\mathrm{Vect}(V)^\perp$.

8

($\Longrightarrow$) Deux matrices semblables ont assurément le même polynôme caractéristique. La réciproque est fausse en général mais nous allons ici l'établir du fait que les matrices A et B sont orthogonales.

($\Longleftarrow$) Supposons $\chi_A = \chi_B$. Puisque la matrice A est orthogonale, le théorème de réduction des isométries assure que la matrice A est orthogonalement semblable à une matrice réduite diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la forme

$$(1), \quad (-1), \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{avec } \theta \in \,]0;\pi[.$$

Le polynôme caractéristique de A est alors un produit de facteurs

$$X - 1, \quad X + 1, \quad \text{ou} \quad X^2 - 2\cos(\theta)X + 1.$$

L'égalité $\chi_A = \chi_B$ assure alors que, à l'ordre près des blocs diagonaux, les matrices réduites auxquelles sont semblables A et B sont identiques. Puisque réorganiser les blocs diagonaux revient à remplacer une matrice par une matrice semblable, on peut affirmer que les matrices A et B sont semblables.

10

<u>(ii) ⇒ (iii)</u> : On a $\left\| \frac{f(x)}{\alpha} \right\| = \|x\|$ car $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Si $\alpha = 0$, tout g convient.

Posons $g = \frac{f}{\alpha}$. Alors $\|g(x)\| = \|x\|$ <u>ie</u> $\boxed{g \in O(E)\ ,\ f = \alpha g}$

<u>(iii) ⇒ (ii)</u> : évident (éventuellement $|\alpha|$).

<u>(iii) ⇒ (i)</u> : $(x|y) = 0$.

$$(f(x)\,|\,f(y)) = \alpha^2 (g(x)|g(y)) = \alpha^2 (x|y) = 0.$$

car g est une isométrie vectorielle.

<u>(i) ⇒ (ii)</u> : $e = (e_1, \dots, e_n)$ BON. Par hypothèse $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ famille ⊥. Or $\forall i \neq j$, $\langle e_i + e_j \,|\, e_i - e_j \rangle = 0$

d'où $\langle u(e_i) + u(e_j) \,|\, u(e_i) - u(e_j) \rangle = 0$ <u>ie</u> $\|u(e_i)\|^2 = \|u(e_j)\|^2$

Soit $\alpha = \|u(e_1)\| = \|u(e_i)\| \in \mathbb{R}_+$ $(\forall i)$

Pour tout $x \in E$, $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ et $\|u(x)\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j u(e_j) \right\|^2$

$$\Rightarrow \|u(x)\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j u(e_j) \right\|^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \underbrace{\|u(e_j)\|^2}_{=\alpha^2} = \alpha^2 \|x\|^2$$

12

<u>1)</u> Si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$ où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$:

On pose $\begin{cases} A = \{ i \mid \lambda_i > 0 \} \\ B = \{ i \mid \lambda_i \leq 0 \} \end{cases}$. Spdg, $A \neq \emptyset$.

- <u>Si $B = \emptyset$</u>, $\sum_{i \in A} \lambda_i \underbrace{\langle x_i | x_0 \rangle}_{<0} = 0$ possible ssi $(\lambda_i) = 0_{\mathbb{R}^n}$

- <u>Si $B \neq \emptyset$</u>, $\left\| \sum_{i \in A} \lambda_i x_i \right\|^2 = \left(\sum_{i \in A} \lambda_i x_i \right) \left(- \sum_{j \in B} \lambda_j x_j \right)$

$$= - \sum_{(i,j) \in A \times B} \underbrace{\lambda_i \lambda_j}_{\geq 0} \underbrace{\langle x_i | x_j \rangle}_{<0} \leq 0$$

d'où $\sum_{i \in A} \lambda_i x_i = 0$ et de même les (λ_i) sont nuls.

Donc $\boxed{(x_1, \dots, x_n) \text{ est libre}}$.

2) Initialisation : $n=1$. $E = \mathrm{Vect}(e)$, on prend $(e, -e)$

Hérédité.

On le suppose pour n. Soit E de dimension $n+1$.

Soit H hyperplan de E (de dimension n).

Par H.R., $(x_0, \dots, x_n) \in H^{n+1}$ tq $\langle x_i | x_j \rangle < 0$ si $i \neq j$.

Soit $x_{n+1} \in H^{\perp} \setminus \{0\}$. Soit

$$f_{i,j} : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto (x_i - t x_{n+1} \mid x_j - t x_{n+1}) \end{array} \right.$$

continue et $f(0) = (x_i | x_j) < 0$ donc $\exists \varepsilon_{ij} > 0$ tq

$\forall t \in [0, \varepsilon_{ij}]$, $f_{i,j}(t) < 0$. $\varepsilon = \min\limits_{(i,j)} \varepsilon_{ij}$. On prend

$\forall i$, $\widetilde{x_i} = x_i - \varepsilon x_{n+1}$.

Alors $(\widetilde{x_0}, \dots, \widetilde{x_n}, x_{n+1})$ convient.

3) Par récurrence forte, en notant $e_k = \dfrac{\widetilde{e_k}}{\|\widetilde{e_k}\|}$ où $\widetilde{e_k} = x_k - \sum_{i=0}^{k-1} \langle x_k | e_i \rangle e_i$

- $\underline{k=0}$: $e_0 = \dfrac{x_0}{\|x_0\|} \Rightarrow x_0 = \underbrace{\|x_0\|}_{>0} e_0$

- Sps $\forall i \in [\![0, k]\!]$. $\widetilde{e_{k+1}} = x_{k+1} - \sum_{i=0}^{k} \langle x_{k+1} | e_i \rangle e_i$

  soit $i \in [\![0, k]\!]$. par H.R., $e_i = \sum_{j=0}^{i} \underbrace{\lambda_{ij}}_{>0} x_j$

  $(x_{k+1} | e_i) = \sum_{j=0}^{i} \underbrace{\lambda_{ij}}_{>0} \underbrace{(x_{k+1} | x_j)}_{<0} < 0$

d'où $\forall i$, $-(x_{k+1}|e_i) > 0$

4) $(x_j)_{j\in[\![0,n]\!]\setminus\{k\}}$ libre par la ①

- $(e_j)_{j\neq k}$ BON obtenue par G-S sur $(e_j)_{j\neq k}$.

On a $x_k = -\sum_{j\neq k}\sum_{i\neq k} \lambda_{ij}(x_k|x_i)\underbrace{e_j}$

positivement ds la base $(x_j)_{j\neq k}$.

5) Méthode 1 :

La famille $(x_0,\dots,x_n)$ est liée. $\exists(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\in\mathbb{R}^n\setminus\{0_{\mathbb{R}^n}\}$,

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i x_i = 0$$

$\forall j\in[\![0,n]\!]$, $\quad 0 = \langle x_j, \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i\rangle = \lambda_j + \gamma\sum_{k\neq j}\lambda_k$

$\Rightarrow \left(\sum_{k=0}^n \lambda_k - \lambda_j\right)\overset{\neq 1}{\gamma} + \lambda_j = 0$

$\Rightarrow \forall j,\ \lambda_j = \dfrac{\gamma\sum_{k=0}^n\lambda_k}{\gamma-1}$ indépendant de j

Ainsi $\boxed{\sum_{i=0}^n x_i = 0}$. On a $0 = \lambda_j + \gamma n\lambda_j$

$\Rightarrow \boxed{\gamma = -\frac{1}{n}}$

Méthode 2 :

$$G = \mathrm{Gram}(x_0,\dots,x_n) = (\langle x_i|x_j\rangle)_{0\leq i,j\leq n}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & (\gamma) \\ & \ddots & \\ (\gamma) & & 1\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

Rappel $\mathrm{rg}(G) = \mathrm{rg}(x_0,\dots,x_n)$.

On a même $M = \mathrm{Mat}_e(x_0, \dots, x_n) \in \mathcal{M}_{n,n+1}(\mathbb{R})$, et donc

$G = M^T M$

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j x_j = 0 \iff M\begin{pmatrix}\lambda_0\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix} = 0 \overset{\ker(M)=\ker(M^TM)}{\iff} M^TM\begin{pmatrix}\lambda_0\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix} = 0$$

$\det(G) = 0$. Or $G = \gamma J_{n+1} + (1-\gamma) I_{n+1}$

or $J_{n+1} = \begin{pmatrix} & (1) & \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} n+1 & & (0) \\ & 0 & \\ (0) & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}P^{-1}$ d'où

$$G = P\begin{pmatrix}\gamma(n+1)+(1-\gamma) & & (0) \\ & 1-\gamma & \\ (0) & & \ddots \\ & & & 1-\gamma\end{pmatrix}P^{-1}.$$

$\det(G) = 0 \Rightarrow \gamma(n+1) + 1 - \gamma = 0$ car $c < 0$ (d'où $c \neq 1$)

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = -\frac{1}{n}}$$

d'où $G\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^{n+1}}$, et $\boxed{\sum_{j=1}^{n} x_j = 0}$

14

$$\mathbb{E}\left(\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i\|^2\right) = \sum_{(i,j)} \mathbb{E}(\varepsilon_i \varepsilon_j \langle v_i | v_j\rangle)$$

Or, $\mathbb{E}(\varepsilon_i \varepsilon_j \langle v_i | v_j\rangle) = 0$ par indépendance pour $i \neq j$

Ainsi $\mathbb{E}\left(\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i\|^2\right) = n$.

donc $\boxed{\exists (\varepsilon_i) \in \{\pm 1\}^n, \ \|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i V_i\|^2 \leq n \text{ d'où la conclusion.}}$

(15) On note $N = \|\cdot\|$

- Si c'est le cas, on a $\begin{cases} \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\varphi(x,y) \\ \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\varphi(x,y) \end{cases}$

donc $\varphi(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$.

- On pose donc $\varphi : (x,y) \mapsto \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$.

On montre que φ est un produit scalaire.

- Symétrie : évident
- Définie positive : $\varphi(x,x) = \|x\|^2 \geq 0$ et $=0$ ssi $x=0$.
- Bilinéarité : Il suffit de la montrer à gauche par symétrie.

↳ D'abord on montre l'additivité : si $(x,x',y) \in E^3$, montrons $\varphi(x+x',y) = \varphi(x,y) + \varphi(x',y)$.

$$\varphi(x,y) + \varphi(x',y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x'+y\|^2 + \|x'-y\|^2\right)$$

Par identité du parallélogramme,

$$\begin{cases} \|x+y\|^2 + \|x'+y\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x+x'+2y\|^2 + \|x-x'\|^2\right) \\ \|x-y\|^2 + \|x'-y\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x+x'-2y\|^2 + \|x-x'\|^2\right) \end{cases}$$

$$\text{Donc } \varphi(x,y) + \varphi(x',y) = \frac{1}{8}\left(\|(x+x')+2y\|^2 - \|(x+x')-2y\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\varphi(x+x', 2y) \quad (*)$$

⚠ on n'a pas encore montré que $\varphi(x, \lambda y) = \lambda \varphi(x,y)$.

Il faut donc ruser un peu.

$\varphi(0_E, y) = 0$. Donc $(\star)$ avec $x' = 0$ donne :

$$\forall x \in E, \ \varphi(x,y) = \frac{1}{2}\varphi(x, 2y)$$

Donc $(\star)$ devient

$$\varphi(x,y) + \varphi(x',y) = \varphi(x+x', y).$$

↳ Maintenant on montre que φ est linéaire à gauche

Exo classique : Une application additive et continue est linéaire

Soit y fixé et $g_y : \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \varphi(x,y) \end{cases}$ continue

par continuité de $\|\cdot\|$ et additive. Alors :

- $\forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \ g_y(nx) = n g_y(x)$ (récurrence facile)
- De même pour $n \in \mathbb{Z}$.
- Pour $x \in E$, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$,

$$p g_y(x) = g_y(px) = g_y\left(q \cdot \frac{p}{q}x\right) = q g_y\left(\frac{p}{q}x\right)$$

donc $\quad \frac{p}{q} g_y(x) = g_y\left(\frac{p}{q}x\right). \quad (\star)$

$\triangleleft$ Comme g_y est continue et que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$, $g_y(\lambda x) = \lambda g_y(x)$.

D'où la linéarité à gauche (et à droite) de φ.

Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire}}$.

18

1) Bilinéarité : oui

Symétrique : évident

Déf pos : $(A|A) = \mathrm{Tr}(A^T A) \geq 0$ avec $=^{té}$ ssi $A = 0$.

2) Tout d'abord, on a $(A|A) = \|A\|^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}^2$

Ainsi $\boxed{|\mathrm{tr}(A)| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right| \overset{CS}{\leq} \sqrt{n}\, \|A\| = \sqrt{n} \left(\sum_{(i,j)} a_{ij}^2\right)^{1/2}}$.

On a égalité si A orthogonale

3) On a $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$

Par analyse synthèse, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M = \overbrace{\frac{M+M^T}{2}}^{\in S_n(\mathbb{R})} - \overbrace{\frac{M^T - M}{2}}^{\in A_n(\mathbb{R})}$ d'où $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

De plus si $S, A \in S_n(\mathbb{R}) \times A_n(\mathbb{R})$, $\phi(S,A) = \mathrm{Tr}(S^T A) = -\mathrm{Tr}(S^T A) = 0$.

D'où $S_n(\mathbb{R}) \perp A_n(\mathbb{R})$.

Finalement $\boxed{E = S_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} A_n(\mathbb{R})}$

4) Le projeté orthogonal de A sur $S_n(\mathbb{R})$ est $\frac{A + A^T}{2}$.

Ainsi $\inf_{M\in S_n} \sum_{i,j} (a_{ij}-m_{ij})^2 = \inf_{M\in S_n} \|A-M\|^2 = d(A,S_n)^2$

$$\boxed{= \left\| \frac{A-A^T}{2} \right\|^2}$$

5) $\frac{M-M^T}{2} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cancel{0} & -1 & 3 \\ 1 & \cancel{0} & 2 \\ -3 & -2 & \cancel{0} \end{pmatrix}$ $j>i$

et $\left\| \frac{M-M^T}{2} \right\| = 0$.

6) $\ker(tr)$ est un $\boxed{\text{hyperplan donc de dimension } n^2-1.}$

7) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \overbrace{\ker(tr)}^{=H} \overset{\perp}{\oplus} \underbrace{\mathrm{Vect}(I_n)}_{=H^\perp}$.

$\langle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{trace nulle}}}{M} | \lambda I_n \rangle = Tr(M^T \lambda I_n) = \lambda Tr(M) = 0$ d'où $\mathrm{Vect}(I_n) \perp \ker(tr)$

$d(J,H) = \|J - p_H(J)\| = \|p_{\mathrm{Vect}(I_n)}(J)\| = \left\| \frac{\langle I_n | J \rangle I_n}{\|I_n\|^2} \right\| = \|I_n\|$

Ainsi $d(J,H) = \|I_n\| = \sqrt{Tr(I_n)} = \sqrt{n}$.

8) $M = \underbrace{\frac{Tr(M)}{n} I_n}_{\in \mathrm{Vect}(I_n)} + \underbrace{\left(M - \frac{Tr(M)}{n} I_n\right)}_{\in H = I_n^\perp}$

donc $\boxed{d(M,G) = \left\| M - \frac{Tr(M)}{n} I_n \right\|}$

24

1) $A \leq B \iff B - A \in S_n^+(\mathbb{R})$

$\iff \forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ X^T(B-A)X \geq 0$

$\iff \forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ X^T B X \geq X^T A X \quad (\alpha)$

Relat° d'ordre : • $A \leq A$ car $0 \in S_n^+(\mathbb{R})$,

• $(A \leq B)$ et $(A \geq B) \iff \forall X,\ X^T B X = X^T A X \Rightarrow \forall X, X^T(B-A)X = 0$

Or $A-B$ DZ avec $Sp(A-B)=\{0\}$ donc $A-B=0$ et $A=B$

- De plus si $A \leq B$ et $B \leq C$,

$$C-A = C-B+B-A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \text{ car c'est un cône.}$$

2) Soit $E \subseteq S_n(\mathbb{R})$. Posons $\|\cdot\| : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ A \longmapsto \sup\limits_{X \in \mathcal{S}(0,1)} |X^T A X| \end{cases}$. C'est une norme triple (on a $\|A\| = \sup\limits_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$).

Alors $E \subseteq S_n(\mathbb{R})$ bornée $\iff \exists M \in \mathbb{R}_+, \forall A \in E, \|A\| \leq M$

$\iff$ ―――――――――, $\forall X \in \mathcal{S}(0,1)$, $|X^T A X| \leq M$

$(\Rightarrow)$ E bornée au sens de $\leq$ (par MI_n et $-MI_n$)

$(\Leftarrow)$ Réciproquement, si $\forall M \in E$, $A \leq M \leq B$, si $k = \max(\|A\|, \|B\|)$, il vient
$-kI_n \leq A \leq M \leq B \leq kI_n$.

3) * Convexités : Si $\lambda \in [0,1]$, $S_1, S_2 \in X(A)$,

$$\begin{cases} A \leq S_1 \\ A \leq S_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda A \leq \lambda S_1 \\ (1-\lambda) A \leq (1-\lambda) S_2 \end{cases} \Rightarrow (\lambda S_1 + (1-\lambda) S_2) - A \in S_n^+(\mathbb{R})$$

donc $\lambda S_1 + (1-\lambda) S_2 \in X(A)$ qui est donc CVX.

De même avec $Y(A)$.

* Fermés : $X(A) = \bigcap\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi_x(\mathbb{R}_+)$ où $\varphi_x : \begin{cases} S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ S \mapsto x^T(S-A)x \end{cases}$ continue car linéaire en dimension finie

De même avec $Y(A)$.

4) $Z(A,B) = \{S \in S_n(\mathbb{R}),\ A \leq S \leq B\}$ fermé borné en df

$$= X(A) \cap Y(B) \ \boxed{\text{convexe et compact}}$$

5) Soit (S_n) $\nearrow$ majorée pour $\leq$ par A

On a $(S_n) \in \mathcal{Z}(S_0, A)^{\mathbb{N}}$ donc par compacité on peut en extraire $S_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} S_\infty \in \mathcal{Z}(S_0, A)$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\forall k \geq N$, $X^T S_N X \leq X^T S_{\varphi(k)} X$

Donc $k \to +\infty$: $X^T S_N X \leq X^T S_\infty X$. Donc $S_N \leq S_\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$, N tel que $\| S_\infty - S_{\varphi(N)} \| < \varepsilon$.

$\forall k \geq \varphi(N)$, et $x \in S(0,1)$.

$$0 \leq \underbrace{X^T (S_\infty - S_{\varphi(n)}) X}_{} \leq \varepsilon$$

$$= X^T (S_\infty - S_k) X + \underbrace{X^T (S_k - S_{\varphi(n)}) X}_{\geq 0}$$

Donc $0 \leq X^T (S_\infty - S_k) X \leq \varepsilon$ donc $S_k \to S_\infty$.

6) $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $A \leq B$, mq $\det A \leq \det B$

On écrit $A = P^T P$ où $P, G \in GL_n(\mathbb{R})$
$B = G^T G$

Par contraposée $\det A > \det B$

Comme $\det A$ et $\det B$ positifs $|\det P| > |\det G|$

$|\det PG^{-1}| > 1$

On dispose d'une racine de $\chi_{PG^{-1}}$ dans $\mathbb{C}$ λ tq $|\lambda| > 1$

Soit x un $\vec{vp}$ associé : $PG^{-1} x = \lambda x$

Donc $y = G^{-1} x$ et $\| P y \|_2 = \| \lambda x \|_2 = \| \lambda G y \|_2$ donc $\| P y \|_2 = |\lambda| \| G y \|_2 > \| G y \|_2$

Or $\| P y \|_2 = y^T P^T P x = y^T A y$

$\| G y \|_2 = y^T B y$

Donc $B - A \notin S_n^+(\mathbb{R})$

Donc $B - A \in S_n^+(\mathbb{R}) \Rightarrow \det B \geq \det A$

26

: $M \in S_n(\mathbb{R})$. $Sp(M) = \{\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n\}$. Alors $\boxed{M' \in S_{n-1}(\mathbb{R})}$

Soit $(e'_1, \dots, e'_{n-1})$ BON tq $\forall i \in [\![1, n-1]\!], M'e'_i = \lambda'_i e'_i$ (dans cet ordre).

$F'_k = \mathrm{Vect}(e'_k, \dots, e'_{n-1})$. De même, $F_k = \mathrm{Vect}(\overbrace{e_{k+1}, \dots, e_n}^{\text{BON}, M\ \underbrace{DZ}_{=\text{diagonalisable}}})$

Alors $\lambda'_k = \min\limits_{\substack{x \in F_k \\ \|x\| = 1}} x^T M' x$ (vu en cours). Or $M' = P^T M P$ où $P \in \mathcal{M}_{n,n-1}(\mathbb{R})$

et $P^T P = I_{n-1}$. $\lambda'_k = \min\limits_{\substack{x \in F'_k \\ \|x\| = 1}} \langle P^T M P x, x \rangle = \min\limits_{\substack{x \in F'_k \\ \|x\| = 1}} \langle MPx, Px \rangle$

$= \min\limits_{\substack{x \in PF'_k \\ \|x\| = 1}} \langle Mx, x \rangle \leq \min\limits_{\substack{x \in F_k \\ \|x\| = 1}} \langle Mx, x \rangle$

$\boxed{\lambda'_k \leq \lambda_{k+1}}$

Pour l'autre inégalité, on procède de même avec $-M$ et $-M'$

Finalement : $\boxed{\lambda_1 \leq \lambda'_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda'_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda'_{n-1} \leq \lambda_n}$

29

(a) $A \in \mathcal{S}_n^{++}(E)$ donc $A^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(E)$ et par suite $\langle \cdot , \cdot \rangle_A$ est un produit scalaire sur E.

(b) On a

$$\langle x, ABy \rangle_A = \langle A^{-1}x, ABy \rangle = \langle x, By \rangle = \langle Bx, y \rangle = \langle ABx, y \rangle_A.$$

L'endomorphisme AB est autoadjoint dans $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle_A)$ donc diagonalisable.

(c) On a

$$\frac{\langle Bx, x \rangle}{\langle A^{-1}x, x \rangle} = \frac{\langle ABx, x \rangle_A}{\|x\|_A^2}.$$

En introduisant une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle_A)$ formée de vecteurs propres de AB, on peut écrire pour $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$,

$$\frac{\langle ABx, x \rangle_A}{\|x\|_A^2} = \frac{\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de AB. Il est clair que cette quantité est comprise entre $\lambda_{\min}(AB)$ et $\lambda_{\max}(AB)$. De plus, ces deux valeurs propres sont valeurs prise par

$$\frac{\langle ABx, x \rangle_A}{\|x\|_A^2}$$

en x vecteur propre associé. Enfin, $E \setminus \{0_E\}$ est connexe par arcs et l'image d'un connexe par arcs par une application continue est un connexe par arcs. On peut donc conclure que les valeurs prises par

$$x \mapsto \frac{\langle Bx, x \rangle}{\langle A^{-1}x, x \rangle}$$

sur $E \setminus \{0\}$ constituent le segment

$$[\lambda_{\min}(AB); \lambda_{\max}(AB)].$$

(d) On a $\langle Bx, x \rangle \leq \lambda_{\max}(B)\|x\|^2$ et $\langle A^{-1}x, x \rangle \geq \lambda_{\min}(A^{-1})\|x\|^2$ donc

$$\frac{\langle Bx, x \rangle}{\langle A^{-1}x, x \rangle} \leq \frac{\lambda_{\max}(B)}{\lambda_{\min}(A^{-1})}.$$

Or

$$\lambda_{\min}(A^{-1}) = \frac{1}{\lambda_{\max}(A)}$$

donc

$$\frac{\langle Bx, x \rangle}{\langle A^{-1}x, x \rangle} \leq \lambda_{\max}(A)\lambda_{\max}(B)$$

et la conclusion est dès lors facile.

(30) C'était mon exo d'oral de l'X !

On note D_A la matrice diagonale $(a_1, \dots, a_n)$. De même pour D_B. Puisque A est symétrique, le théorème spectral affirme qu'il existe une matrice orthogonale O_A telle que $A = {}^tO_A D_A O_A$. De même, il existe O^B orthogonale telle que $B = {}^tO_B D_B O_B$. On pose $O = O_A{}^tO_B$ qui est aussi orthogonale. Alors, on a

$$\mathrm{tr}AB = \mathrm{tr}(({}^tO_A D_A O_A)({}^tO_B D_B O_B)) = \mathrm{tr}(AOB{}^tO) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j O_{i,j}^2.$$

On pose $m_{i,j} = O_{i,j}^2$. Il reste à montrer que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j m_{i,j} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i. \tag{1}$$

De plus, on observe qu'il suffit de montrer ce résultat lorsque les suites (a_i) et (b_i) sont *strictement* décroissantes. Le résultat général s'obtient ensuite par densité en utilisant que les fonctions $X \to {}^tO_{A/B} X O_{A/B}$ sont continues, tout comme la trace. Comme O est une matrice orthogonale, $M = (m_{i,j})$ est une matrice bi-stochastique, c'est-à-dire vérifiant

(a) $0 \leq m_{i,j} \leq 1$ pour tout i, j ;

(b) la somme des coefficients sur chaque ligne est égale à 1 ;

(c) la somme des coefficients sur chaque colonne est égale à 1.

On va montrer que (1) est vérifié pour toute matrice bi-stochastique. L'application

$$f \, : \, M \to \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j m_{i,j}$$

est continue et l'ensemble des matrices bi-stochastiques est compact (évident d'après le caractérisation (a)-(b)-(c)) donc elle atteint son maximum sur cet ensemble pour une certaine matrice M. On montre que M est l'identité. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. On regarde le plus petit indice i tel que $m_{i,i} < 1$. On peut supposer que $i = 1$ (car sinon, on se ramène au même problème en dimension $n - i + 1$). La somme des coefficients de la première colonne de M vaut 1, comme $m_{1,1} < 1$, il doit exister $j_0 \in \{2, \dots, n\}$ avec $m_{1,j_0} > 0$. De même, il existe $i_0 \in \{2, \dots, n\}$ tel que $m_{i_0,1} > 0$. Fixons $0 < \varepsilon < \min(m_{1,j_0}, mi, 1_0)$. On considère la matrice $\tilde{M}$ définie comme perturbation de M :

$$\tilde{m}_{i,j} = m_{i,j} + \begin{cases} \varepsilon & \text{si } (i,j) = (1,1) \text{ ou si } (i,j) = (i_0, j_0), \\ -\varepsilon & \text{si } (i,j) = (i_0, 1) \text{ ou si } (i,j) = (1, j_0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On constate que $\tilde{M}$ est encore une matrice bi-stochastique (les coefficients restent bien dans $[0,1]$ d'après le choix de ε). De plus

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j \tilde{m}_{i,j} - \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j m_{i,j} = \varepsilon a_1 b_1 + \varepsilon a_{i_0} b_{j_0} - \varepsilon a_{i_0} b_1 - \varepsilon a_1 b_{j_0} = \varepsilon(a_1 - a_{i_0})(b_1 - b_{j_0})$$

Cette quantité est strictement positive car on a supposé que les suites (a_i) et (b_i) étaient strictement décroissantes, ce qui contredit la maximalité de M pour f.

33

1) On utilise le théorème de co-réduction. Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $\begin{cases} A = P^T P \\ B = P^T D P \end{cases}$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$\text{Alors } \det(\alpha A + \beta B) = \det(\alpha P^T P + \beta P^T D P)$$
$$= \det(P)^2 \det(\alpha + \beta D)$$
$$= \det(P)^2 \prod_{j=1}^{n} (\alpha + \beta \lambda_j)$$

Comme $\alpha + \beta = 1$, par concavité du $\ln$, si $\lambda_j \neq 0$

$$\ln(\alpha + \beta \lambda_j) \geq \alpha \ln 1 + \beta \ln \lambda_j = \beta \ln \lambda_j$$

(Si $\lambda_j = 0$ c'est évident).

Donc par croissance de exp,

$$\alpha + \beta \lambda_j \geq \lambda_j^{\beta}$$

$$\text{et } \det(\alpha A + \beta B) \geq \det(P)^2 \prod_{j=1}^{n} \lambda_j^{\beta}$$
$$\geq \det(P)^2 \det(D)^{\beta}$$
$$= \det(A)^{\alpha} \det(B)^{\beta} \quad (\text{car } \alpha + \beta = 1)$$

2) $\det(I_n+A)^{1/n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{DZ en BON}}}{=} \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)^{1/n} = \ln\left(e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\gamma_i)}\right)$

La fonction $x \mapsto \ln(1+e^x)$ est convexe.

$$\ln\left(1+\prod_{i=1}^{n}\gamma_i^{1/n}\right) = \ln\left(1+e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(\gamma_i)}\right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\ln(1+e^{\ln(\lambda_i)})$$

$$\overset{\nearrow \exp}{\Rightarrow} \quad 1+\prod_{i=1}^{n}\lambda_i^{1/n} \leq \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)^{1/n}$$

d'où $\det((I_n+A))^{1/n} \geqslant 1+\prod_{i=1}^{n}\lambda_i^{1/n}$

$$\boxed{\det(I_n+A)^{1/n} \geq 1+(\det A)^{1/n}}$$

4) Pour $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, la démo précédente fonctionne

La densité de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ dans $S_n^{+}(\mathbb{R})$ et la continuité du det permettent de conclure